

大学入試改革—プレテスト踏まえた授業案

数学Ⅱ・数学B

漸化式を自ら立てさせる

漸化式の作成ワークシート

【複利法】

「複利法において年利を0.5%とすると、100万円を預金し、200万円にするにはおよそ何年かかるか」という問について2通り以上の解法を考えよ。

【有名問題】

階段を1度に1段か2段上る上り方を組み合わせて上る。この上り方で10段の階段を上る際の上り方の場合の数を求めよ。

【確率の漸化式】

n 個の袋の中にそれぞれ赤球が1個、白球が9個入っている。これらの n 個の袋からそれぞれ1個ずつ球を取り出したとき、赤球が奇数個取り出される確率を P_n とする。 P_{n+1} を P_n を用いて表せ。

(一橋大・改)

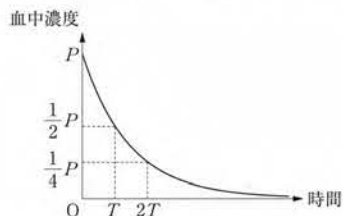
プレテスト問題(一部掲載)

数学Ⅱ・数学B 第3問～第5問は、いずれか2問を選択し、解答しなさい。

第3問 (選択問題)

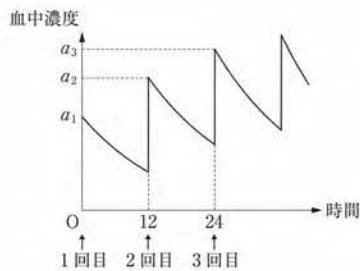
次の文章を読んで、下の問いに答えよ。

ある薬Dを服用したとき、有効成分の血液中の濃度(血中濃度)は一定の割合で減少し、 T 時間が経過すると $\frac{1}{2}$ 倍になる。薬Dを1錠服用すると、服用直後の血中濃度は P だけ増加する。時間0で血中濃度が P であるとき、血中濃度の変化は次のグラフで表される。適切な効果が得られる血中濃度の最小値を M 、副作用を起こさない血中濃度の最大値を L とする。



薬Dについては、 $M=2$ 、 $L=40$ 、 $P=5$ 、 $T=12$ である。

(1) 薬Dについて、12時間ごとに1錠ずつ服用するときの血中濃度の変化は次のグラフのようになる。



堀内 陽介

広尾学園高校教諭

n を自然数とする。 a_n は n 回目の服用直後の血中濃度である。 a_1 は P と一致すると考えてよい。第 $(n+1)$ 回目の服用直前には、血中濃度は第 n 回目の服用直後から時間の経過に応じて減少しており、薬を服用した直後に血中濃度が P だけ上昇する。この血中濃度が a_{n+1} である。

$P=5$ 、 $T=12$ であるから、数列 $\{a_n\}$ の初項と漸化式は

$$a_1 = \text{ア}, a_{n+1} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} a_n + \text{エ} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

となる。

数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めてみよう。

【考え方1】

数列 $\{a_n - d\}$ が等比数列となるような定数 d を求める。 $d = \text{オカ}$

に対して、数列 $\{a_n - d\}$ が公比 $\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ の等比数列になることを用いる。

【考え方2】

階差数列をとって考える。数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ が公比 $\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ の等比数列になることを用いる。

いずれの考え方を用いても、一般項を求めることができ、

$$a_n = \text{サシ} - \text{ス} \left(\frac{\text{セ}}{\text{ソ}} \right)^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。

(2) 薬Dについては、 $M=2$ 、 $L=40$ である。薬Dを12時間ごとに1錠ずつ服用する場合、 n 回目の服用直前の血中濃度が $a_n - P$ であることを注意して、正しいものを、次の①～⑤のうちから二つ選ぶ。

- ① 4回目の服用までは血中濃度が L を超えないが、5回目の服用直後に血中濃度が L を超える。
- ② 5回目の服用までは血中濃度が L を超えないが、服用し続けるといつか必ず L を超える。
- ③ どれだけ続けて服用しても血中濃度が L を超えることはない。
- ④ 1回目の服用直後に血中濃度が P に達して以降、血中濃度が M を下回ることはないので、1回目の服用以降は適切な効果が持続する。
- ⑤ 2回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが、2回目の服用以降は、血中濃度が M を下回ることはないので、適切な効果が持続する。
- ⑥ 5回目までは服用直前に血中濃度が M 未満になるが、5回目の服用以降は、血中濃度が M を下回ることはないので、適切な効果が持続する。

■ 具体的現象を表現する数列題材に

数学Ⅱ・数学Bの第3問は、プレテストの中でも、特に現行のセンター試験からの変化を実感する問題の一つである。これまでの数列の問題の出題方法とは大きく異なっているためだ。

従来のセンター試験では、与えられた数列について、それが何を表した数列であるか、与えられた漸化式はどんな状況を式にしたものかなど、問題の意味や背景にはあまり注目しなかった。それに対し、この問題は、ある薬を服用した際に、有効成分の血中濃度が時間の経過でどのように変化したかを数列で捉えるというものである。具体的な現象を表現する数列を題材としている点が従来と大きく異なる。

ここで求められる資質・能力は、与えられた数列を用いてモデリン

グシ、そこから得られる数学的な事実を読み取る力である。また、漸化式の解法を2通り示し、複数の見方をできるか問うものでもある。ここで問われていることこそ、数列を学ぶ意義の一つであり、今後、数列の指導にぜひ取り入れていくべきものであると考えている。

これまでのよくある数列の指導は、漸化式を解くことがその中心に据えられている。漸化式の解法はパターンに分類して指導することが多く、生徒には暗記要素が強いと捉えられている分野でもある。このようなパターン解法を受け入れさせる指導では、生徒自身が考える余地がないために、上記の新テストの求める資質・能力は身に付いていかないのであろうし、数列自体を学ぶ意欲が喚起されにくい。

■ 授業全体をデザインし直す

そこで、数列の授業全体をデザインし直すことを提案したい。漸化式の指導は、初めに「漸化式を立てるところから入るようしてみるのはいかがでしょうか。」

漸化式を立てるというワークによって「その漸化式を満たす数列を求めたい」というモチベーションを喚起すれば、生徒は漸化式を解く意義と意欲を獲得するだろう。

例えば、複利法について。1期間の利率を r 、 n 期間後の元利合計を a_n とすれば、第 $n+1$ 期における利息は $a_{n+1} - a_n$ である。複利法では第 $n+1$ 期における元金は a_n なので $a_{n+1} - a_n = r a_n$ が成り立つ。

授業では、具体的に「複利法において年利を0.5%とすると、100万円を預金して200万円にするにはおよそ何年かかるか、2通り以上の解法を考えよ」というような問いを考えさせる。等比数列の和として求めることも、等比数列の漸化式を作成して求めることもできることを確認し、ペアで互いに説明させることなどで定着させるとよい。

その後、さまざまな題材で漸化式を立てる演習に進む。漸化式を立てる題材は、大学入試問題でもおなじみの場合の数・確率のもの

などたくさんある。離散的な現象を解析して漸化式を立てるためには、数列を「数の列」から、「自然数を定義域とする関数」すなわち離散関数として理解していることが不可欠である。その数列の振る舞い(増減)を調べるために、関数という微分に対応した「差分法」や、積分に対応する概念として「和分法」を導入することも大いに役立つはずだし、推奨したい。

差分とは階差数列のことであり、和分とはΣ計算のことである。どちらも現在の数列の指導内容の中に入っているものであるが、現在の扱い方からさらに踏み込んだ見方をしてみると、それぞれ非常に豊かで有用性の高いツールとして生徒は学ぶことができる。

今まで、バラバラなトピックだと思ってきた階差数列、Σ計算、漸化式などが全てつながっているものであるという理解をすることで初めて、新テストが問うような数学の力が付いていくと確信している。

新テストで問われる資質・能力を育むために、授業の中で生徒たちが自分で考え、学ぶ意欲と意義を獲得し、楽しんで数学を学んでいけるように指導に当たっていただきたいと思う。

2018 第5回

夏の教育セミナー

新学習指導要領と大学入試改革

主催：日本教育新聞社 / 株式会社 ナガセ (東進ハイスクール・東進衛星予備校)

この夏8月に、全国12都市で開催!

5年目となる本年はより実践型へ!

昨年8月、全国12会場で「夏の教育セミナー」を開催。約5,000名の先生方にご来場いただきました。今年も大盛況が予想されます。ぜひご参加ください!

定員制 お申し込み受付中!

夏の教育セミナー kyoiku-sakidori.com 夏の教育セミナー 検索



*プログラム詳細は順次公開いたします。もうしばらくお待ちください。

全国12都市・会場にて、順次開催いたします。

お近くの会場へ、ぜひご参加ください。



開催地・日程

8/1水 仙台
[会場] TKPガーデンシティ仙台

8/2木 大宮
[会場] パレスホテル大宮

8/3金 東京
[会場] ベルサール新宿グランド

8/4土 札幌
[会場] 札幌コンベンションセンター

8/6日 福岡
[会場] ヒルトン福岡シーホーク

8/7火 広島
[会場] 広島コンベンションホール

8/8水 横浜
[会場] 横浜ロイヤルパークホテル

8/9木 大阪
[会場] コングレコンベンションセンター

8/10金 金沢
[会場] ANAクラウンプラザホテル金沢

8/17金 神戸
[会場] ホテルオークラ神戸

8/20日 千葉
[会場] 三井ガーデンホテル千葉

8/21火 名古屋
[会場] 名古屋観光ホテル